Tercer Parcial TF 1313 — Prof.Aurelio Stammitti
06/07/2008

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor de Frontera

Se tiene una aleta anular de radio interno 5cm, radio externo de 20cm y espesor 4mm, que esta hecha de plomo, con conductividad de 35 W/mºC. Dicha aleta esta intercambiando calor con aire a una temperatura de 30ºC y coeficiente convectivo 40 W/m^{2}ºC.
Con un total de 7 nodos, determine la distribucion radial de temperaturas en la aleta, si la base esta sometida a un flujo de calor q_b=15000W/m^2.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dT}{dr} - \frac{2\cdot h}{k\cdot t}\cdot\left(T - T_{inf}\right) = 0$$

en $r = R_i = 0.05$ $\quad -k\cdot\frac{dT}{dr} = q_b$

en $r = R_e = 0.2$ $\quad -k\cdot\frac{dT}{dr} = h\cdot\left(T - T_{inf}\right)$

Resolucion por el método de las Diferencias Finitas

Datos: $t := 0.004$ m $\quad k := 35$ W/m·ºC $\quad h := 40$ W/m^2·ºC $\quad T_{inf} := 30$ ºC

Condiciones Iniciales:

$R_i := 0.05$ Condicion de Derivada $q_b := 15000$ W/m^2

$R_e := 0.2$ Condicion de Conveccion $\frac{dT}{dr} = \frac{h}{-k}\cdot\left(T - T_{inf}\right)$

Discretizacion:

$Np := 7 \qquad \Delta r := \frac{R_e - R_i}{Np - 1} \qquad \Delta r = 0.025$ en m

Primero se reacomoda la ecuacion diferencial:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dT}{dr} - \frac{2\cdot h}{k\cdot t}\cdot T + \frac{2\cdot h}{k\cdot t}\cdot T_{inf} = 0$$

Ahora se definen las funciones que forman a la ED:

$A(r) := 1 \qquad B(r) := \frac{1}{r} \qquad C(r) := -\frac{2\cdot h}{k\cdot t} \qquad D(r) := \frac{2\cdot h}{k\cdot t}\cdot T_{inf}$

$C(0) = -571.429 \qquad D(0) = 17142.857$ estos son valores constantes

Ahora se definen las funciones resultantes de la sustitucion de las expresiones de diferencias finitas de las derivadas y su reagrupamiento en funcion de los nodos.

Estas funciones tienen sentido solo para los nodos internos:

$M\left(r_i\right)\cdot T_{i-1} + P\left(r_i\right)\cdot T_i + N\left(r_i\right)\cdot T_{i+1} = -D\left(r_i\right)$ Ecuacion general del nodo Interno i

Donde:

$M(r) := \frac{A(r)}{\Delta r^2} - \frac{B(r)}{2\cdot\Delta r} \qquad N(r) := \frac{A(r)}{\Delta r^2} + \frac{B(r)}{2\cdot\Delta r} \qquad P(r) := C(r) - 2\cdot\frac{A(r)}{\Delta r^2}$

$\frac{A(0)}{\Delta r^2} = 1600 \qquad \frac{1}{2\cdot\Delta r} = 20 \qquad P(0) = -3771.429$

Tratamiento de las Fronteras:

Frontera Izquierda: Base de la aleta:
Se sustituye la derivada por la diferencia hacia delante de dos puntos:

$$\left(-\frac{1}{\Delta r}\right)\cdot T_0 + \left(\frac{1}{\Delta r}\right)\cdot T_1 = -\frac{q_b}{k}$$

$$\boxed{-\frac{q_b}{k} = -428.571}$$

Frontera Derecha: Extremo Convectivo:
Se sustituye la derivada por la diferencia hacia atras de dos puntos:

$$\left(-\frac{1}{\Delta r}\right)\cdot T_{n-1} + \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{h}{k}\right)\cdot T_n = \frac{h}{k}\cdot T_{inf}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{h}{k}\right) = 41.143} \qquad \boxed{\frac{h}{k}\cdot T_{inf} = 34.286}$$

Ahora se procede a armar el sistema matricial

Valores radio

$$rvs(a,b,M) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ dr \leftarrow \dfrac{b-a}{M-1} \\ \text{for } i \in 0..M-1 \\ \quad rd_i \leftarrow a + i\cdot dr \\ rd \end{array} \right.$$

Vector de Radios

$$rv := rvs(R_i, R_e, Np)$$

$$rv = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.075 \\ 0.1 \\ 0.125 \\ 0.15 \\ 0.175 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Matriz:

Vector Indep.

$$Mat := \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{\Delta r}\right) & \left(\frac{1}{\Delta r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M(rv_1) & P(rv_1) & N(rv_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M(rv_2) & P(rv_2) & N(rv_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(rv_3) & P(rv_3) & N(rv_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(rv_4) & P(rv_4) & N(rv_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M(rv_5) & P(rv_5) & N(rv_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\Delta r}\right) & \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{h}{k}\right) \end{bmatrix} \qquad bv := \begin{pmatrix} -\frac{q_b}{k} \\ -D(rv_1) \\ -D(rv_2) \\ -D(rv_3) \\ -D(rv_4) \\ -D(rv_5) \\ \frac{h}{k}\cdot T_{inf} \end{pmatrix}$$

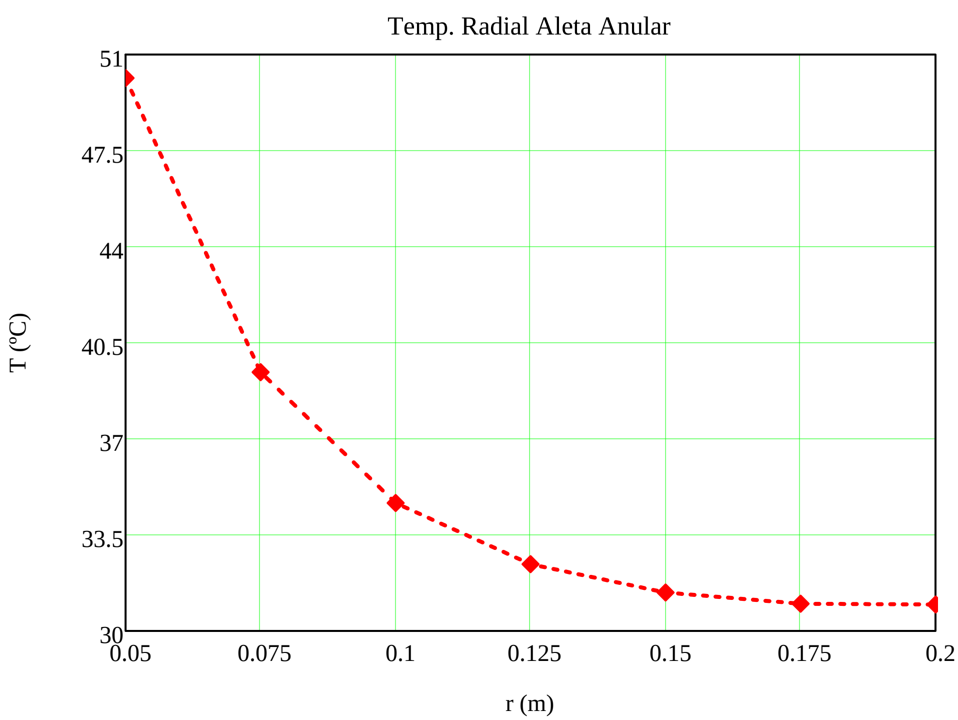
Evaluando:

$$Mat = \begin{pmatrix} -40 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1333.33 & -3771.43 & 1866.67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1400 & -3771.43 & 1800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1440 & -3771.43 & 1760 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1466.67 & -3771.43 & 1733.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1485.71 & -3771.43 & 1714.29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 41.14 \end{pmatrix} \quad bv = \begin{pmatrix} -428.571 \\ -17142.857 \\ -17142.857 \\ -17142.857 \\ -17142.857 \\ -17142.857 \\ 34.286 \end{pmatrix}$$

Resolviendo: $Tv := \text{lsolve}(Mat, bv)$

$$Perfil := \text{augment}(rv, Tv) \qquad Perfil = \begin{pmatrix} 0.05 & 50.142 \\ 0.075 & 39.428 \\ 0.1 & 34.661 \\ 0.125 & 32.433 \\ 0.15 & 31.401 \\ 0.175 & 30.989 \\ 0.2 & 30.961 \end{pmatrix}$$

Tabla del Perfil de Temperaturas de la Aleta en función del radio



$q_b = 1.5 \times 10^4$

$T_{inf} = 30$

FIN